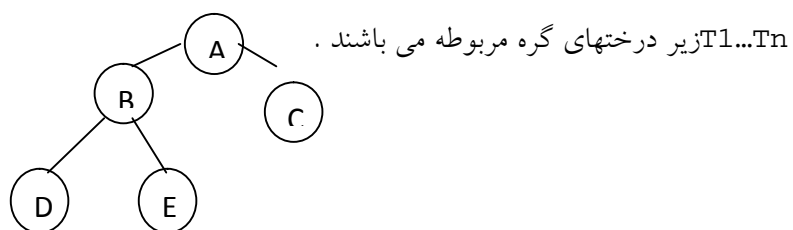


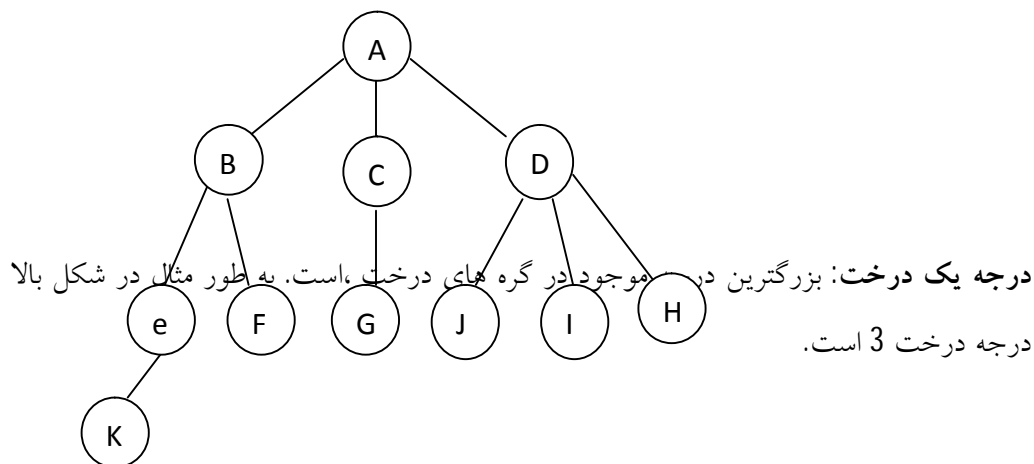
درخت:

مجموعه ای از یک یا چند گره می باشد که خصوصیات زیر را دارد:

- (1) دارای یک گره به نام ریشه (root) است .
- (2) هر گره به $n \geq 0$ مجموعه مجزا T_1, T_2, \dots, T_n تقسیم می شود که هر یک از این مجموعه ها خود یک درخت است.



هریک از عناصر درخت نود یا گره نام دارد و به هر یک از خطهایی که یک گره را به گره دیگر متصل میکند یال نامیده می شود و تعداد زیر درختان یک گره درجه آن نامیده می شود.



به گره ای که از درجه صفر باشد گره برگ می گوئیم. و گره های هم زاد، فرزندان یک گره هستند.

مثال: در شکل بالا B, C, D هم زاد هستند، چون فرزندان A هستند.

در شکل بالا E, F هم زاد هستند، چون فرزندان B هستند.

اجداد یک گره: گره هایی که در مسیر طی شده از ریشه تا گره مورد نظر وجود دارد .

اجداد گره E : A و B است.

اجداد گره F : A و B است.

اجداد گره H : A و D است.

سطح یک گره :

فاصله یک گره تا گره ریشه است. (فرض می کنیم فاصله گره ریشه با خودش 1 باشد).

سطح گره A ، یک و سطح گره های B, C, D دو و سطح گره k چهار است .

ارتفاع درخت: بیشترین سطح گره های درخت . در شکل قبل ارتفاع درخت 4 است .

مسیر: دنباله ای از یال های متوالی است.

شاخه: مسیری است که به یک برگ ختم میشود.

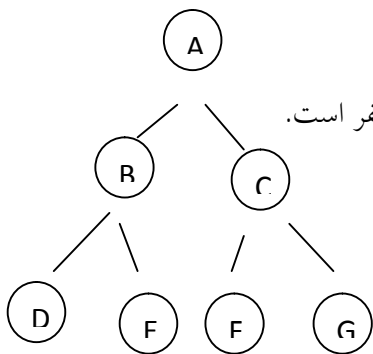
ABEK یک شاخه است، AD یک شاخه است.

ABE یک شاخه نیست، بلکه یک مسیر است.

درخت متوازن: درختی که اختلاف سطح برگ های آن حداکثر یک است.

مثال: شکل قبل یک درخت متوازن است. چون اختلاف سطح برگ ها با برگ های

C, H و ... حد اکثر 1 است.



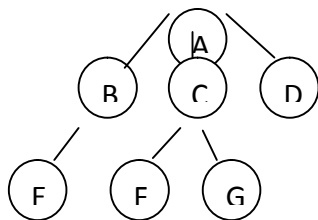
درخت کاملاً متوازن: درختی که اختلاف سطح برگ ها در آن صفر است.

هر درخت کاملاً متوازن یک درخت متوازن است اما هر درخت متوازن یک درخت کاملاً متوازن نیست.

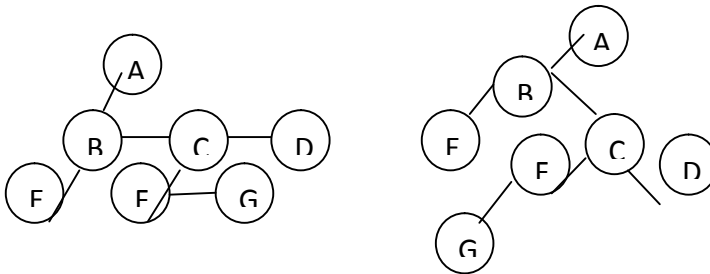
روش های نمایش یک درخت:

1) روش پرانتز: هر گره ای را می نویسیم و زیر شاخه هایش را داخل پرانتز قرار می دهیم.

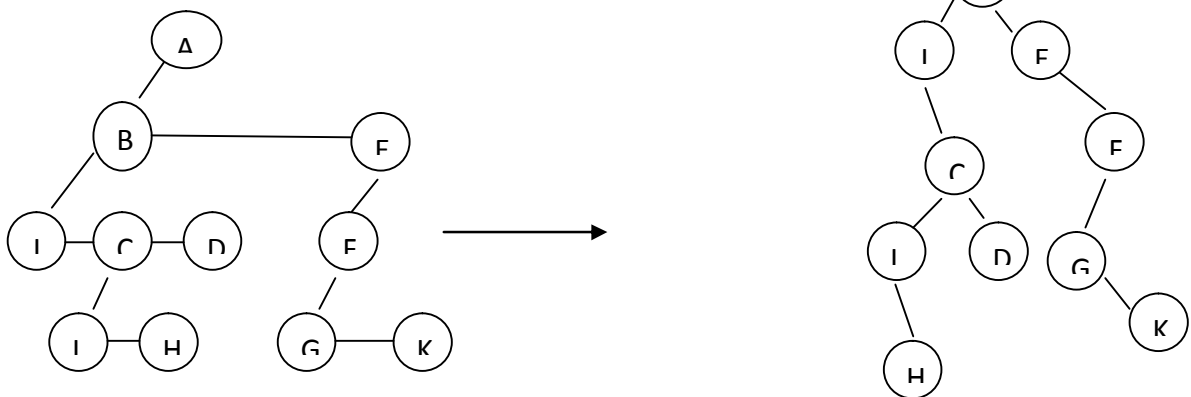
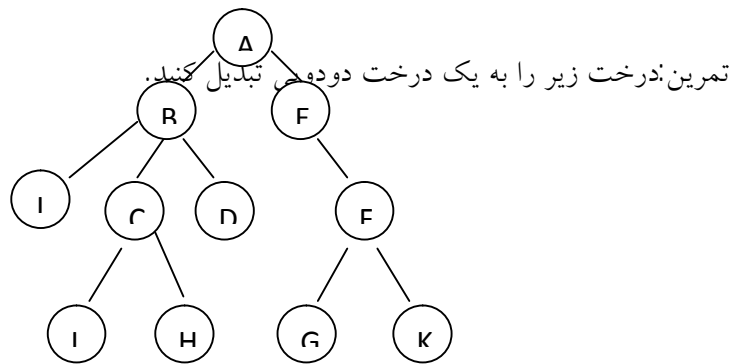
$(A(B(E), C(F, G), D))$



(2) استفاده از روش پیوندی:



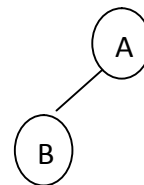
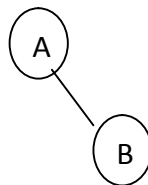
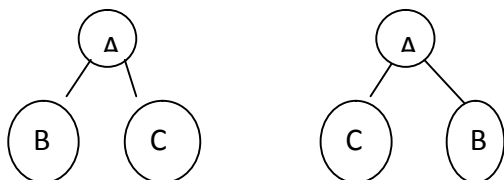
در روش پیوندی هر گره ساختار زیر دارد. که left به گره فرزند سمت چپ اشاره می کند و next به هم زادهای راست آن گره اشاره می کند.



درخت دودویی: درختی است که گره های آن حد اکثر از درجه دو باشند.

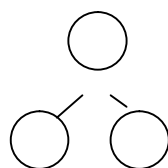
درخت دودویی: درختی که یا تهی است یا حاوی یک سری گره ها . هر گره حد اکثر 2 فرزند دارد.

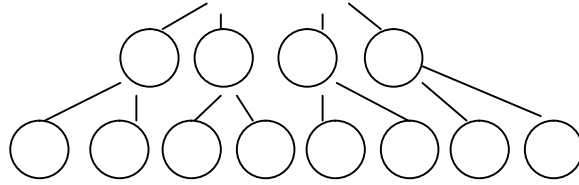
ترتیب گره ها در درخت دودویی مهم است. یعنی دو درخت زیر با هم برابر نیستند.



قضیه 1: حداکثر تعداد گره ها در سطح i ام یک درخت دودویی برابر 2^{i-1} است.

$$(i \geq 1)$$





حداکثر یک گره داریم. $2^{(1-1)} = 2^0 = 1$ در سطح 1

حداکثر دو گره داریم. $2^{(2-1)} = 2^1 = 2$ در سطح 2

حداکثر هشت گره داریم. $2^{(4-1)} = 2^3 = 8$ در سطح 4

$$2^{(4-1)} = 2^3 = 8$$

اثبات به روش استقرا:

1: فرض می کنیم $i=1$ باشد داریم:

$$2^{(i-1)} = 2^{(1-1)} = 2^0 = 1 \text{ تعداد گره ها}$$

2: فرض می کنیم در سطر k ام رابطه $2^{(k-1)}$ برقرار باشد.

3: ثابت می کنیم در سطر $k+1$ ام رابطه $2^{(k+1-1)}$ برقرار است.

$$\text{حداکثر تعداد گره در سطح } k \text{ ام} = 2 * \text{حداکثر تعداد گره ها در سطر } k+1 \text{ ام}$$

قضیه 2: حداکثر تعداد گره ها در یک درخت دودویی به عمق k ، $2^k - 1$ است و

$k \geq 1$ است.

(اثبات برعهده دانشجوی)

قضیه 3: اگر n_0 تعداد گره ها از درجه صفر، n_1 تعداد گره ها از درجه 1، n_2 تعداد گره

ها از درجه 2 باشد آنگاه: $n_0 = n_2 + 1$

اثبات: اگر n تعداد گره ها باشد واضح است که

$$(1) \quad n = n_0 + n_1 + n_2$$

تعداد یالها در درخت را می توان به صورت زیر محاسبه کرد:

$$(1) \quad \text{تعداد یالها} = 2 * n_2 + 1 * n_1 + 0 * n_0 = 2n_2 + n_1$$

از طرفی هر گره به یک یال متصل است. به جز گره ریشه که به هیچ یالی متصل نیست.

تعداد گره ها $= 1 + \text{تعداد یالها}$

$$(2) \quad 1 + 2n_2 + n_1 = n$$

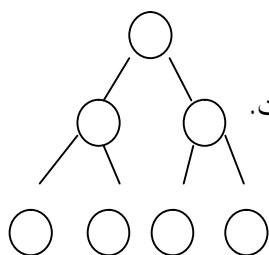
$$(1) \quad \implies n_0 + n_1 + n_2 = 2n_2 + n_0 + 1 \implies n_1 = n_2 + 1$$

و (2)

درخت پر: درختی است که همه گره های آن به غیر از گره های برگ از درجه 2 باشد یا به عبارتی

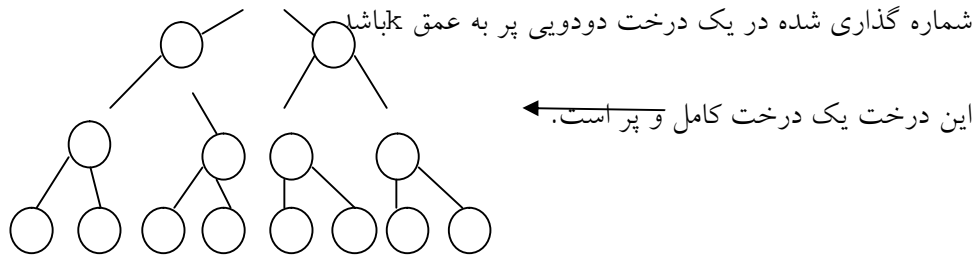
دیگر درختی که در آن گره ای از درجه یک نداشته باشیم.

تعداد گره ها در درخت پر به عمق k برابر است با $2^k - 1$ و $k \geq 1$ است.

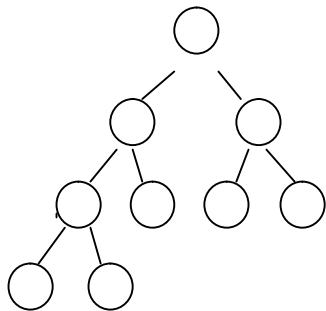


این یک درخت پر است چون درجه یک در آن نیست.

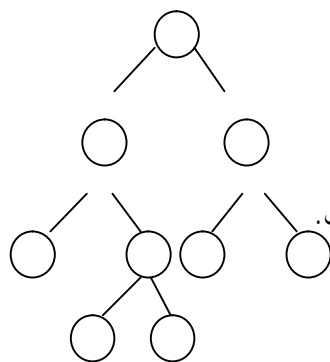
درخت کامل: درخت دودویی با n گره و عمق k کامل است اگر تنها و اگر گره هایش مطابق گره های



با توجه به درخت بالا درختهای زیر را تشخیص می دهیم:



درخت روبرو یک درخت کامل است.



درخت روبرو پر نیست و یک درخت کامل هم نیست.

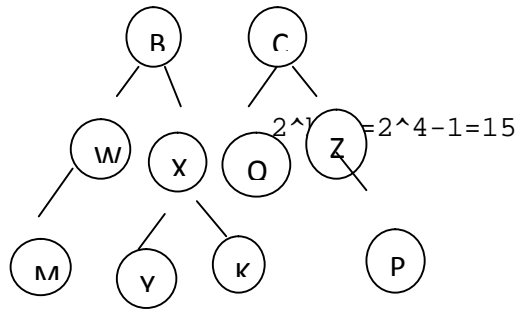
نمایش درخت دودویی در حافظه:

1) روش آرایه (2) روش پیوندی

روش آرایه: اگر i اندیس یک گره در آرایه باشد آنگاه $2i$ اندیس فرزند چپ و $2i+1$ اندیس فرزند راست است. ($i > 0$)



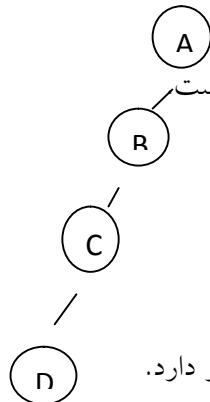
مثال: درخت زیر را در یک آرایه نشان دهید.



عمق درخت $k=4$ است

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
A	B	C	W	X	Q	Z	M	-	Y	K	-	-	-	P

** برای درختان پر آرایه روش مناسبی است.



** برای درختان اریب آرایه مناسب نیست چون میزان اتلاف حافظه زیاد است

درخت اریب ←

اگر j اندیس یک گره در آرایه باشد و $1 < j < 2j$ آنگاه پدر j در اندیس $[j/2]$ قرار دارد.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	----	----	----

A	B	-	C	-	-	-	D	-	-	-	-	-	-	-
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

پیمایش درختان دودویی: سه پیمایش زیر را بررسی می کنیم:

(1) inorder (پیمایش میانوندی)

(2) preorder (پیمایش پیشوندی)

(3) postorder (پیمایش پسوندی)